Μιγαδικές συναρτήσεις I 1/8/2/21

Περιεχόμενο μαθήματος: αναλυτικές ιδιότητες (όρια, διαφορισιμότητα, ολοκληρωσιμότητα) μιγαδικών συναρτήσεων

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, όπου $\mathbb{C}$ το σύνολο των μιγαδικών

Σ.π.β. με αντίστοιχες θεωρίες για $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ΑΠΕΙ1, ΑΠΕΙ2)

$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ και $\vec{f}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ (ΑΠΕΙ3, ΑΠΕΙ4)

Προαπαιτούμενα α) Γνώση ιδιοτήτων (αναλυτικών) διανυσματικών πεδίων $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (ΑΠΕΙ3)

β) Αλγεβρικές και τοπολογικές ιδιότητες του $\mathbb{R}^2$ (π.χ. και σύγκλιση ακολουθιών στον $\mathbb{R}^2$) (*) (~~ΑΠ~~ ΑΠΕΙ3, τοπολογία μετρικών χώρων)

(*) η τοπολογία του $\mathbb{C}$ είναι ακριβώς η ίδια με την τοπολογία του $\mathbb{R}^2$

γ) Σειρές και δυναμοσειρές στον $\mathbb{R}$ (ΑΠΕΙ2)

Ήδη όλα τα προηγούμενα απαιτούν άνεση σε στοιχειώδη λογισμό, γραμμική άλγεβρα και αναλυτική γεωμετρία

Δομή του μαθήματος ΚΕΦ1. α) οι μιγαδικοί αριθμοί και η "άλγεβρα" τους β) εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση στο $\mathbb{C}$ δυνάμεις και ρίζες στο $\mathbb{C}$

ΚΕΦ.2 τοπολογία του $\mathbb{C}$ (= τοπ. στο $\mathbb{R}^2$)

ακολ. -//- (= ακολ -//-)

σύγκλιση σε $z_0 \in \mathbb{C}$ (σύγκλιση σε $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$)

νέο στοιχείο: η έννοια του απείρου (∞) στο $\mathbb{C}$

Μιγαδικές συναρτήσεις $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (διανυσματικό πεδίο) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Συνέχεια $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ($=$ συνέχεια του $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$)

και όρια

κεφ 3: Η έννοια της μιγαδικής διαφορισιμότητας (*) μιας μιγαδικής συνάρτησης $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ή $f: D \to \mathbb{C}$ με $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (z_0 \in D)$$

προσέγγιση κατά Riemann

[Η έννοια της ολόμορφης συνάρτησης] (*)'

και η σχέση της με την διαφορισιμότητα του διανυσματικού πεδίου $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

(*) $\mathbb{C}$ - διαφορισιμότητα (*)' $\mathbb{R}$ - διαφορισιμότητα

κεφ. 4: α) σειρές και δυναμοσειρές στο $\mathbb{C}$ και σύγκλιση τους: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ για $z \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε: η

προσέγγιση κατά Weierstrass

σειρά αυτή να συγκλίνει ($=$ η ακολ. των μερ. αθροισμάτων) $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$

β) αναπτύγματα βασικών συναρτήσεων σε δυναμοσειρές (π.χ. εκθετική συνάρτηση, τριγωνομετρικές συναρτήσεις)

γ) η έννοια της αναλυτικής συνάρτησης

κεφ 5: Μιγαδικά επικαμπύλια ολοκληρώματα, Θεώρημα αναπαράστασης Cauchy - Taylor, αναλυτικές = ολόμορφες

προσέγγιση κατά Cauchy

σύνδεση κεφ. 3, 4, 5

κεφ 6: Μελέτη μεμονωμένων ιδιομορφιών π.χ. $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$